
INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 6

Exercice 1. On reprend l'exemple de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, i.e, on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où

$$\Omega = \{(s_0, s_1, \dots, s_n) : s_0 = 0 \text{ et } s_i - s_{i-1} \in \{-1, 1\} \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket\},$$

et $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ est la probabilité uniforme sur Ω . Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère la variable aléatoire

$$X_i : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s_0, s_1, \dots, s_n) & \longmapsto & s_i - s_{i-1}. \end{array}$$

Montrer que $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes, et de même loi donnée par

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Maintenant, considérons l'exemple de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ vu en Exercice 4 de la Série 5. Pour quel(s) choix de p_u, p_d, p_r, p_l obtient-on la probabilité uniforme sur l'ensemble des marches simples de longueur n sur $\mathbb{Z}^2$?

Exercice 2. On dit qu'une variable aléatoire X est discrète s'il existe un ensemble dénombrable S tel que $\mathbb{P}_X(S) = 1$. Montrer qu'il existe un espace probabilisé discret $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire $\hat{X}$ sur cet espace tels que $\hat{X}$ ait la même loi que X .

Étendre alors la preuve du Théorème 2.20 du cours aux variables aléatoires discrètes.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire. Montrer soigneusement que $\mathbb{P}_X(]-\infty, y]) \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow -\infty$ et $\mathbb{P}_X(]-\infty, y]) \rightarrow 1$ lorsque $y \rightarrow \infty$. Cela complète la preuve du fait que $F_X : y \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}_X(]-\infty, y])$ est une fonction de répartition.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soit F sa fonction de répartition. Montrer que quels que soient $x < y \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\mathbb{P}(X < x) = F(x^-)$,
2. $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$,
3. $\mathbb{P}(X \in (x, y)) = F(y^-) - F(x)$,
4. $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x^-)$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire indépendante d'elle-même. Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = y_0) = 1$. *Indication : considérer la fonction de répartition $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de X , et remarquer que $F(y) \in \{0, 1\}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.*

Exercice 6. Reprenons l'exemple du graphe aléatoire d'Erdős-Rényi $G_{n,p}$ vu en cours.

- Montrer que lorsque $p = 1/2$, on retrouve la probabilité uniforme sur l'ensemble des graphes à n sommets.
- On suppose que $p = p_n \leq n^{-2}$. Montrer que la probabilité que G_{n,p_n} soit connexe tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$.

0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

Exercice 7. Soit I un ensemble dénombrable, et soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une collection d'espaces topologiques à base dénombrable. Pour chaque $i \in I$, on note $\mathcal{F}_i$ la tribu borélienne sur X_i (la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts $\mathcal{T}_i$). Montrer que la tribu borélienne sur $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T}_\Pi)$ (la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts pour la topologie produit) coïncide avec la tribu produit $\mathcal{F}_\Pi$ sur $\prod_{i \in I} X_i$.